Colle du 02/02 - Sujet 1
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème sur les suites adjacentes.

Exercice 1. Etudier suivant les valeurs de u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

1. Montrer que $X^2 - 3X + 2$ divise P.
2. Déterminer le quotient de la division de $(X-1)^n - 1$ par $X - 2$.
3. En déduire le quotient de P par $X^2 - 3X + 2$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 02/02 - Sujet 2
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Démontrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont racines distinctes de P, alors...

Exercice 1. Déterminer les polynômes solutions de l'équation $P = (X-1)\,P'$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 4$.

1. Justifier que telle suite existe et est unique.
2. Déterminer toutes les suites constantes solutions de l'équation de récurrence.
3. En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 02/02 - Sujet 3
Suites numériques et polynômes

Question de cours. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors il en va de même pour $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 1. On considère l'équation $(E) : 3P = (X+1)\,P' + P''$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Déterminer des relations entre $P^{(k)}(-1)$.
3. A l'aide de la formule de Taylor, en déduire les solutions de (E).

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n + 6x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une unique valeur d'annulation sur $\mathbb{R}$ que l'on notera x_n.
2. Etudier la convergence et le limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.